6. Το αόριστο ολοκλήρωμα

6.1 Το αόριστο ολοκλήρωμα

Η έννοια του ολοκληρώματος προκύπτει από την αντίθετη της παραγώγισης διαδικασία. Στη βασική του διατύπωση, το πρόβλημα είναι το εξής:

Αν δοθεί μια εξίσωση της μορφής $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, *ποια είναι η* $y(x)$ *;*

Η απάντηση εξαρτάται προφανώς από τη μορφή της συνάρτησης $f(x)$. Αν η $f(x)$ είναι μια σταθερά, έστω a, η λύση της εξίσωσης $\dfrac{dy}{dx} = a$ απαιτεί να βρούμε μια συνάρτηση $y(x)$, η οποία, όταν την παραγωγίσουμε ως προς x, να μας δώσει τη σταθερή ποσότητα a. Γνωρίζουμε από τη θεωρία της παραγώγισης, ότι η συνάρτηση $y = ax + c$, όπου c μια σταθερά, έχει αυτήν την ιδιότητα. Αυτή είναι επομένως η λύση της δοθείσας εξίσωσης. Μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι η γενικότερη δυνατή και άρα η μοναδική λύση.

Η εύρεση της $f(x)$ από την $y(x)$ επιτυγχάνεται με *παραγώγιση*. Η αντίθετη διαδικασία, η οποία οδηγεί στην εύρεση της $y(x)$ αν δοθεί η $\dfrac{dy}{dx}$, ονομάζεται *ολοκλήρωση*. Συμβολικά γράφουμε:

$$\text{Αν} \quad \frac{dy}{dx} = f(x), \qquad \text{τότε} \qquad y(x) = \int f(x)\,dx . \tag{6.1}$$

Ονομάζουμε το $\int f(x)\,dx$ *αόριστο ολοκλήρωμα της* $f(x)$ *ως προς* x. Έτσι, με λόγια,

Αν η $f(x)$ *είναι η παράγωγος της* $y(x)$ *ως προς* x,
τότε η $y(x)$ *ισούται με το αόριστο ολοκλήρωμα της* $f(x)$ *ως προς* x.

Ο προσδιορισμός 'αόριστο' θα γίνει σαφής όταν εξετάσουμε το 'ορισμένο' ολοκλήρωμα, στο επόμενο κεφάλαιο.

Η πράξη την οποία συμβολίζει ο *τελεστής παραγώγισης* $\dfrac{d(...)}{dx}$ ή $(...)'$ είναι η εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης που θα τοποθετηθεί στις παρενθέσεις. Ο *τελεστής ολοκλήρωσης* $\int (...)\,dx$ συμβολίζει την αντίθετη διαδικασία, κατά την οποία αποκτάται η συνάρτηση της οποίας η παράγωγος είναι η συνάρτηση που βρίσκεται μέσα στις παρενθέσεις.

Αν $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$, *η συνάρτηση* $F(x)$ *ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της* $f(x)$.

Η $f(t)$ ονομάζεται *παράγωγος* της $F(x)$. Αν η συνάρτηση $F(x)$ είναι μια αρχική συνάρτηση της $f(x)$, τότε αρχική συνάρτηση της $f(x)$ είναι και κάθε συνάρτηση $G(x) = F(x) + c$, όπου c είναι οποιαδήποτε σταθερά, γνωστή ως *σταθερά ολοκλήρωσης*.

Παραθέτουμε τη διαδικασία λύσης μερικών απλών προβλημάτων ολοκλήρωσης:

$$\frac{dy}{dx} = x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + c \qquad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}x^2 + c\right) = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x^n \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \qquad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right) = x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c \qquad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}(\ln x + c) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\sin x \quad\Rightarrow\quad y(x)=\int \sin x\,dx=-\cos x+c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(-\cos x+c\right)=\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}=\sin ax \quad\Rightarrow\quad y(x)=\int \sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{a}\cos ax+c\right)=\sin ax$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos x \quad\Rightarrow\quad y(x)=\int \cos x\,dx=\sin x+c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(\sin x+c\right)=\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos ax \quad\Rightarrow\quad y(x)=\int \cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\sin ax+c\right)=\cos ax$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{x} \quad\Rightarrow\quad y(x)=\int e^{x}\,dx=e^{x}+c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(e^{x}+c\right)=e^{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{ax} \quad\Rightarrow\quad y(x)=\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}+c \quad \text{επειδή} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}e^{ax}+c\right)=e^{ax}$$

Σε όλα τα παραδείγματα, c είναι η σταθερά της ολοκλήρωσης.

Είναι πάντοτε καλή τακτική να ελέγχουμε ότι παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα επανακτούμε την ολοκληρωθείσα συνάρτηση.

Θα έχει ήδη γίνει σαφές ότι η ολοκλήρωση μιας συνάρτησης $f(x)$ εξαρτάται από την ικανότητά μας να βρούμε μια αρχική της συνάρτηση $F(x)$ [της οποίας η παράγωγος να είναι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση $f(x)$]. Στην παραγώγιση μιας συνάρτησης $F(x)$, η διαδικασία είναι πάντοτε δυνατή αν είμαστε σε θέση να εκφράσουμε την $F(x+\delta x)$ ως άθροισμα όρων γνωστών συναρτήσεων και να βρούμε το όριο $\lim_{\delta x\to 0}\left(F(x+\delta x)-F(x)\right)$ στη μορφή $f(x)\delta x$. Η αντίθετη διαδικασία, η ολοκλήρωση, δεν είναι δυνατόν να τυποποιηθεί με κάποιον τέτοιο τρόπο. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι ο μετασχηματισμός της ολοκληρωτέας συνάρτησης, με διάφορους τρόπους, σε όρους οι οποίοι να μας είναι αναγνωρίσιμοι ως παράγωγοι γνωστών συναρτήσεων. Είναι λοιπόν απαραίτητο να γνωρίζει κανείς τις παραγώγους τουλάχιστον των πιο κοινών συναρτήσεων. Στο στάδιο αυτό, η αποστήθιση των ολοκληρωμάτων του πίνακα που ακολουθεί είναι απαραίτητη.

Πίνακας στοιχειωδών αόριστων ολοκληρωμάτων

$\int dx = x + c$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + c$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$

Σε όλες τις σχέσεις, c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.

Υπάρχουν πολλοί πίνακες ολοκληρωμάτων, από συνοπτικοί έως εξαιρετικά εκτενείς, στους οποίους τα ολοκληρώματα συναρτήσεων κατατάσσονται με συστηματικό τρόπο για να μπορεί κανείς να βρει εύκολα ένα ζητούμενο ολοκλήρωμα. Και πάλι όμως, η αναγωγή τής ολοκληρωτέας συνάρτησης σε κάποιαν όσο το δυνατό πιο απλή μορφή είναι συνήθως το κλειδί για την εύρεση της απάντησης. Η χρήση τέτοιων μεθόδων εξαρτάται σε αποκλειστικό σχεδόν βαθμό από την πείρα που έχει κανείς στη λύση τέτοιων προβλημάτων. Οι δυνατότητες αυτής της διαδικασίας έχουν αυξηθεί σημαντικά με τη χρήση ορισμένων προγραμμάτων ηλεκτρονικών υπολογιστών, τα οποία, και έχουν κάνει την εύρεση του ζητούμενου ολοκληρώματος πολύ γρήγορη, αλλά και έχουν τη δυνατότητα αλγεβρικού μετασχηματισμού τής ολοκληρωτέας συνάρτησης, αν αυτή δεν υπάρχει αυτούσια στον πίνακα του προγράμματος.

6.2 Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος

Δίνονται, χωρίς απόδειξη, οι κυριότερες ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων.
(Τα *a, b, k* είναι σταθερά. Ο τόνος υποδηλώνει παραγώγιση μιας συνάρτησης ως προς *x*.)

1	$\int \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$	(αθροιστικότητα)
2	$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \quad k = \text{σταθερό}$	
3	$\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}\int f(z)\,dz, \quad z = ax+b$	(αλλαγή μεταβλητής)
4	$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c$	
5	$\int u(x)\,\upsilon'(x)\,dx = u(x)\,\upsilon(x) - \int u'(x)\,\upsilon(x)\,dx$	(ολοκλήρωση κατά παράγοντες)
6	$\int f\big(g(x)\big)\,dx = \int f(g)\dfrac{dx}{dg}\,dg = \int f(g)\dfrac{dg}{g'(x)}$	(αλλαγή μεταβλητής)
7	$\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx = \int f(z)\,dz, \quad z \equiv g(x)$	(ολοκλήρωση με αντικατάσταση)

Τα παρακάτω Παραδείγματα επιδεικνύουν την εφαρμογή αυτών των κανόνων.

Παράδειγμα 1

Ιδιότητα 3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \cos(ax+b)\,dx$.

Αντικαθιστούμε $z \equiv ax+b$. Τότε είναι επίσης $dz = a\,dx$, ή $dx = dz/a$. Επομένως,

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \int \cos z\,\frac{dz}{a} = \frac{1}{a}\int \cos z\,dz = \frac{1}{a}\sin z + c = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c\,.$$

Βεβαίως, με την απόκτηση πείρας, και για ολοκληρώματα τόσο απλά, μπορεί κανείς να γράφει το αποτέλεσμα απευθείας.

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{dx}{ax+b}$.

Ιδιότητα 4. Επειδή $d(ax+b) = a\,dx$, έχουμε

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + c\,.$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sin^3 x \cos x\,dx$.

Ιδιότητα 7. Επειδή $d(\sin x) = \cos x\,dx$, έχουμε

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int \sin^3 x\,d(\sin x) = \frac{1}{4}\sin^4 x + c\,.$$

Με αλλαγή της μεταβλητής (Ιδιότητα 3), γίνονται πιο γενικά τα ολοκληρώματα του προηγούμενου πίνακα ολοκληρωμάτων:

$\int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$ $(n \neq -1)$ $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$	$\int e^{ax}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax} + c$ $\int \sin(ax+b)\,dx = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + c$ $\int \cos(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

Ένας εκτενέστερος πίνακας δίνεται στο τέλος του κεφαλαίου.

Προβλήματα

1 Επαληθεύστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) + c \qquad \int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$$

παραγωγίζοντας τα αποτελέσματα για να βρείτε τις ολοκληρωτέες συναρτήσεις.

2 Δείξτε ότι: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + c$. Υπόδειξη: $\displaystyle\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$.

3 Δείξτε ότι: $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$. Υπόδειξη: $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$.

4 Δείξτε ότι: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}} + c = -\frac{1}{a}\ln\left(1+e^{-ax}\right) + c$ Υπόδειξη: $\displaystyle\frac{1}{1+e^{ax}} = \frac{e^{-ax}}{1+e^{-ax}}$.

5 Δείξτε ότι: $\displaystyle\int \sin^2 kx\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4k}\sin 2kx + c$.

6 Δείξτε ότι: $\displaystyle\int \tan kx\,dx = -\frac{1}{k}\ln\cos k\,x + c$ Υπόδειξη: $\displaystyle\tan kx = \frac{\sin kx}{\cos kx}$.

7 Δείξτε ότι: $\displaystyle\int e^{ax}\sin kx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+k^2}(a\sin kx - k\cos kx) + c$

Υπόδειξη: $\displaystyle\sin kx = \frac{1}{2i}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)$.

Βιβλιογραφία

M. R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1982. Κεφ. 5.

7.4 Πίνακας στοιχειωδών αόριστων ολοκληρωμάτων

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4. $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

5. $\int e^{ax}\, dx = \dfrac{1}{a} e^{ax} + c$

6. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

7. $\int x e^{ax}\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + c$

8. $\int x^2 e^{ax}\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2) + c$

9. $\int \dfrac{dx}{1+e^{ax}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left(1+e^{-ax}\right) + c = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{e^{ax}}{1+e^{ax}} + c$

10. $\int \sin kx\, dx = -\dfrac{1}{k}\cos kx + c$

11. $\int \cos kx\, dx = \dfrac{1}{k}\sin kx + c$

12. $\int \tan kx\, dx = -\dfrac{1}{k}\ln\cos kx + c$

13. $\int \cot kx\, dx = \dfrac{1}{k}\ln\sin kx + c$

14. $\int \dfrac{dx}{\sin kx} = \int \operatorname{cosec} kx\, dx = \dfrac{1}{k}\ln\tan\dfrac{kx}{2} + c = \dfrac{1}{k}\ln(\operatorname{cosec} kx - \cot kx) + c$

15. $\int \dfrac{dx}{\cos kx} = \int \sec kx\, dx = \dfrac{1}{k}\ln\tan\left(\dfrac{kx}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) + c = \dfrac{1}{k}\ln(\sec kx + \tan kx) + c$

16. $\int e^{ax}\sin kx\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+k^2}(a\sin kx - k\cos kx) + c$

17. $\int e^{ax}\cos kx\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+k^2}(a\cos kx + k\sin kx) + c$

18. $\int \sin^2 kx\, dx = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4k}\sin 2kx + c$

19. $\int \cos^2 kx\, dx = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4k}\sin 2kx + c$

20. $\int \sin mx \sin nx\, dx = \dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c \qquad |m| \neq |n|$

21. $\int \cos mx \cos nx\, dx = \dfrac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \dfrac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c \qquad |m| \neq |n|$

22. $\int \sin mx \cos nx\, dx = -\dfrac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \dfrac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + c \qquad |m| \neq |n|$

23. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 kx} = -\dfrac{1}{k}\cot kx + c$

24. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 kx} = \dfrac{1}{k}\tan kx + c$

25. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + c$

26. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + c$

27. $\int \sqrt{ax+b}\ dx = \dfrac{2}{3a}(ax+b)^{3/2} + c$

28. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \dfrac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$

29. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}\,dx = \sqrt{x(a+x)} - a\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{a+x}\right) + c$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}\,dx = a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{x(a-x)} + c$

31. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)\right] + c$

32. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + c$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) + c$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

35. $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

36. $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{a}\,dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + c$

37. $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + c$

38. $\displaystyle\int \arctan\frac{x}{a}\,dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln\left(a^2+x^2\right) + c$

39. $\displaystyle\int \operatorname{arccot}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arccot}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln\left(a^2+x^2\right) + c$

Πίνακες Ολοκληρωμάτων. Βιβλιογραφία

Σύντομοι

M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions (with formulas, graphs, and mathematical tables)*. (Dover Publications, New York, 1965).

M. R. Spiegel, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*.
(Schaum's Outline Series in Mathematics, McGraw-Hill Book Company, 1968 κ.ε.).

I. N. Bronshtein and K. A. Semendyayev, *Handbook of Mathematics*. (Springer, 1985).

Εκτενείς

G. Petit Bois, *Tables of Indefinite Integrals*. (Dover, 1961 κ.ε.).

H. B. Dwight, *Tables of Integrals*. (Macmillan, 1974).

Πολύ εκτενείς

I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Intagrals, Series and Products*.
(Academic Press, 1980).

A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O. I. Marichev, *Integrals and Series*.
Vol. 1: *Elementary Functions*, Vol. 2: *Special Functions*. (Gordon and Breach, 1986).

Πίνακες ολοκληρωμάτων υπάρχουν επίσης σε μαθηματικά προγράμματα ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπως το MATHEMATICA και άλλα.